756. 楕円函數論(Hasseノ方法)

河田　敬義(京大)

(I) H. Hasse ノ "Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper, I, II, III", Crelle, 175, 1936. ノ II ノ初メノ部分ニ、楕円函數体ノ Automorphismus ヲ論ジ、ソレカラ Additionstheorem ニ及ンデヰマス。然シ此処デハ専ラ代數的ナ方法ガ取扱ッテヰルノデ、積分ノ逆函數トシテノ楕円函數ニハ全然手ヲ触レテヰマセン。ソレ故 Additionstheorem トイッテモ直接普通ノ楕円函數論ノソレト同一内容ナルコトヲ示シテヰマセン。ソレデ之レカラ Hasse ノ代數的理論ヲ骨組トシテ、ソノ解析的補ヒヲ附加シテ、一ツノ Abel ノ定理及ビ加法定理ニ到ル從来トハ多少異ッタ楕円函數論ヲ紹介シタイト思ヒマス。ソノ際出来ルダケ代數的及ビ幾何的方法ヲ取リ度イト思ヒマス。

基礎ニナルノハ Riemann-Roch ノ定理:

$\mathrm{Dim}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Grad}(\mathfrak{L}) - g + 1 + \mathrm{Dim}\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{L}}\right)$. デス。コレハ古クカラ純代数的ニ証明サレテヰマスガ、ソレガ函数論ニオケル定理ト一致スルコトヲ確認スルノガ、代数函数体Kニオケル Bewertung デ定義サレタ Primdivisor $\mathfrak{p}$ トKニ属スル Riemann 面 $\mathfrak{R}_K$ 上ノ一点 $\bar{\mathfrak{p}}$ トノ一對一ノ對應スルトイフ事実デス。即チ $\bar{\mathfrak{p}}$ ニオイテ Pol ヲモタヌKノ元全体ノナス Ring ガ $\mathfrak{p}$ ニ属スル Maximalordnung $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ニナツテヰルトイフコトデス。

以後 K ヲ楕円函数体即チ Geschlecht ヲ1トシマス。Kノ Automorphismus σ トハKノ元 z ニ一意ニ又Kノ元 z^σ ガ對應シテ四則算法ガ保持サレ，特ニ $c^\sigma = c$, (c = konst.) ナルモノノミヲ考ヘルコトニシマス。ソノ時 $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^\sigma$ ヲ考ヘルコトニヨツテ $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^\sigma$ ナル $\mathfrak{R}_K$ ノ上ノ一對一ノ変換ヲ生ジマスガ、ソノ時 $z(\mathfrak{p}) = z^\sigma(\mathfrak{p}^\sigma)$ トイフコトカラ $\mathfrak{R}_K$ ノ自分自身ヘノ homöomorph ナ對應トナルコトガワカリマス。(実ハヨク知ラレテヰル様ニ konform ニナリマスガ、ソレハ以下デ不用デス。)（$z(\mathfrak{p})$ ハ $\mathfrak{p}$ ニ於ケル z ノ値）

(II) K ノ Automorphismus.

Riemann-Roch ノ定理カラ Primdivisor $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ ノウチ3ケヲ與ヘレバ

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1} \sim z, \quad z \in K$$

トナル様ナ他ノ一ツハ一意ニ確定シマス。以下 $\mathfrak{o}$ ヲ或ル一ツノ固定シタ Primdivisor トシテ(1)ノコトヲ

(2) $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2+\mathfrak{p}_3$

ト書クコトニシマス。又ハ $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_3$ ヲ與ヘレバ $\mathfrak{p}_2$ ガキマルノデスカラ $\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_3$ ト書クコトニシマス。

此ノ様ニシテ Primdivisor ノ間ニ和、差ヲ定義スルト、全体デ $\mathfrak{o}$ ヲ Nullelement トスル Modul ニナルコトガワカリマス。例ヘバ $\mathfrak{o}$ ガ Null ニナルコトハ $\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}}\sim z\in K$ カラ $z=\mathrm{const.}$ トナリ $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$. 即チ $\mathfrak{o}+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, 又 $\mathfrak{p}_1+(\mathfrak{p}_2+\mathfrak{p}_3)=(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2)+\mathfrak{p}_3$ ハ両辺共ニ $\frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}^2\mathfrak{r}}\sim z\in K$ ナル $\mathfrak{r}$ ニ等シクナルトイフコトニ導ケバ分リマス。

今 $\mathfrak{o}$ ノ他ニ $\mathfrak{a}$ ヲ勝手ニ與ヘルト Riemann-Roch カラ $(\mathfrak{o}\mathfrak{a})^{-1}$ ノ konst. デナイ Multiplum z ガアリマス。ソレデ $K/k(z)$ ヲ考ヘレバ z ノ取リ方カラ二次ノ拡大トナリマス。

故ニソノ Automorphismus ヲ $1,\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ トスルト

(3) $\mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}}=-\mathfrak{p}+\mathfrak{a}$ (Spiegelung)

トナリマス。ソレハ、$\mathfrak{p}$ ヲ勝手ニ與ヘル時 $z-z(\mathfrak{p})\sim\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}}$ カラ $\mathfrak{p}^{\sigma}=\mathfrak{q}=\mathfrak{a}-\mathfrak{p}$ ガ出マス。コノ時 $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ ガ $\mathfrak{o},\mathfrak{a}$ 丈デキマルコトハ z ノ一般ノ形ハ $az+b$. (a,b ハ konst.) ナルコトカラ $k(z)$ ガキチント定マルコトカラ分リマス。

次ニ (Translation) $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}=\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}}\cdot\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ ト置キマスト

(4) $\mathfrak{p}^{\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}}=(\mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}}})^{\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}}=(-\mathfrak{p})^{\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}}=\mathfrak{p}+\mathfrak{a}$

トナリマス。之カラ又

(5) $\tau_{\sigma,a}\cdot\tau_{\sigma,b}=\tau_{\sigma,a+b}$

ガワカリマス。ソレハ直チニ $\mathfrak{z}^{\tau_{\sigma,a}\cdot\tau_{\sigma,b}}=\mathfrak{z}+a+b=\mathfrak{z}^{\tau_{\sigma,a+b}}$ ガ出マスカラ、之レカラ(5)ヲイフニハ『KノAutomorphismusハ $\mathfrak{z}\to\mathfrak{z}^{\sigma}$ ナル對應デ一意ニ定マル』コトヲ云ハネバナリマセン。即チ $\mathfrak{z}^{\sigma}=\mathfrak{z}$ ナラ σ ハ identisch ナ Auto. ナルコトヲイヘバヨロシイ。

先ヅ $\mathfrak{z}^{\sigma}=\mathfrak{z}$ カラ $z^{\sigma}=c_z z$ ガワカリマス。次ニ z_1, z_2 ヲ一次独立トスレバ $c_{z_1+z_2}(z_1+z_2)=c_{z_1}\cdot z_1+c_{z_2}\cdot z_2$ カラ $c_{z_1}=c_{z_1+z_2}=c_{z_2}$ ガワカリ $(az)^{\sigma}=az^{\sigma}=a\cdot c_{z}z$ 一方ニ $c_{az}(az)$ カラ $c_{az}=c_z$。特ニ $z=\mathrm{const}$ ノ時 $c_z=1$ カラスベテノ $c_z=1$ トナリ $z^{\sigma}=z$ トナルコトガ分リマス。ソレデ(5)ガ確立シマシタ。

Translation, Spiegelung トイフ言葉ガ $\mathfrak{R}_K$ ノ Torus デノ変換ノ様ヲ示シテヰルトイフコトノ大体ノ様子ハ実際ニ二枚ノ数球面ヲ Torus ニカヘル homotop ナ変換（例ヘバ竹内先生ノ函数論ニアル）デ, $\mathfrak{z}\to\mathfrak{z}^{\sigma}$ ヲ跡ヅケテ見レバ直チニワカル事デス。

次ニ differential トノ関係ヲシラベマス。今 $K/k(z)$ ガ二次ノ拡大ニナル様ニ z ヲトリ、$K=k(z,w')$, $w'^2+2f(z)\cdot w'+g(z)=0$. ($f(z)$, $g(z)$ ハ Polynom) ニ w' ヲトリマス。又 $w=w'+f(z)$ トスレバ $w^2\in k(z)$ デ因数分解ヲシテ

$$w^2=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

又ハ $w^2=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$

トナリマス。最初ノ場合ハ Verzweigungsdivisor ハ $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{p}_\infty$.（コヽニ $z - \alpha \sim \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{p}_\infty^2}$ etc.）

$\therefore$ Canonische Klasse ノ代表トシテ $\mathfrak{W}^* \sim \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{o}^2} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}{\mathfrak{p}_\infty^3}$.

$\therefore$ $\frac{dz}{w} \sim 1$ トナリ、$du = \frac{dz}{w}$ ガ K ノ只一ノ ganz Differential トナル。後ノ場合モ同様。

之レカラ (6) $(du)^{\tau_{\theta,\mathfrak{a}}} = du$ ガ証明サレル。ソレニハ $\tau_{\theta,\mathfrak{a}}$ ノ定義カラ $\mathfrak{a}$ ヲ勝手ニトル時 $(du)^{\sigma_{\theta,\mathfrak{a}}} = -du$ ヲイヘバヨイ。ソレハ $\mathfrak{x}$ ヲ $(\theta\mathfrak{a})^{-1}$, Multiplum ニトレバ

$$(du)^{\sigma_{\theta,\mathfrak{a}}} = \frac{(dx)^{\sigma_{\theta,\mathfrak{a}}}}{w^{\sigma_{\theta,\mathfrak{a}}}} = \frac{dx}{-w} = -du.$$

(III) Riemann 面 $\mathcal{R}_K$ ノ Topologie.

(II) ニ於テ $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$ 等ヲ定義シタカラ $\mathcal{R}_K$ ハ Modul ト考ヘラレルガ、ソノ時『$\mathcal{R}_K$ ガ topologische Gruppe トナル』コトヲ先ヅ証明スル。即 $\mathcal{R}_K$ 上デ $\mathfrak{p}_n \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_n \to \mathfrak{q}$ ナル時ハ

$$\left.\begin{array}{ll}(7) & -\mathfrak{p}_n \to -\mathfrak{p}. \\ (8) & \mathfrak{p}_n + \mathfrak{q}_n \to \mathfrak{p}+\mathfrak{q}\end{array}\right\} \text{トナル。}$$

(7) ハ $-\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_n^{\sigma_{\theta,\theta}}$ カラ $\sigma_{\theta,\theta}$ ガ topologisch ナルコトノ直接ノ結果デス。(8) ハ $\mathfrak{p}_n + \mathfrak{q}_n + \mathfrak{r}_n = \theta = \mathfrak{r}'_n$ ヲキメル時 $\mathfrak{r}'_n \to \mathfrak{r} = -\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$ ヲイヘバ (7) ト組合セレバヨロシイ。先ヅ $z_n \sim \frac{\mathfrak{p}_n\mathfrak{q}_n\mathfrak{r}_n}{\theta^3}$, $z_n(\mathfrak{a}) = 1$ ナル z_n ガアリマス。コヽニ $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{r}$ ニトリマス。今 $x \sim \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{b}}{\theta^3}$, $y \sim \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{c}}{\theta^3}$ 且ツ $x(\mathfrak{q}) = y(\mathfrak{p}) = -1 = x, y$ ヲモトメル。$\mathfrak{b} \neq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{p}$ ト

ナル。Riemann-Roch カラ $z_n = a_n + b_n x + c_n y$, ($a_n$, b_n, c_n: konst) トナル。故ニ

$$\begin{cases} z_n(\mathfrak{a}) = 1 = a_n, \\ z_n(\mathfrak{p}_n) = 0 = a_n + b_n x(\mathfrak{p}_n) + c_n y(\mathfrak{p}_n) \\ z_n(\mathfrak{q}_n) = 0 = a_n + b_n x(\mathfrak{q}_n) + c_n y(\mathfrak{q}_n). \end{cases}$$

之レヲ解イテミレバ $a_n = 1 \to 1$, $b_n \to 1$, $c_n \to 1$ ナルコトガ分ル。

∴ $z = 1 + x + y$ トオケバ $z_n \to z$, $z \sim \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}}{\theta^3}$ トナル。

R_K ハ kompact デスカラ $\{\mathfrak{r}_n\}$ カラ konvergent ナ Teilforlge ヲトリ、ソノ集積点ヲ $\mathfrak{r}'$ トスル時 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$ ヲイヘバ目的ヲ達シタワケデス。ソレハ

$$\begin{aligned} z(\mathfrak{r}') &= \lim_{n\to\infty} a_n + b_n x(\mathfrak{r}') + c_n y(\mathfrak{r}') \\ &= \lim \left(a_n + b_n x(\mathfrak{r}_n) + c_n y(\mathfrak{r}_n) \right) \\ &\qquad + b_n\left(x(\mathfrak{r}') - x(\mathfrak{r}_n)\right) + c_n\left(y(\mathfrak{r}') - y(\mathfrak{r}_n)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $\mathfrak{r}' \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ヲイヘバヨイ。$\mathfrak{r}' = \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ ナル時ハ $\mathfrak{r}_n \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_n \to \mathfrak{p}$, $z_n(\mathfrak{p}_n) = z_n(\mathfrak{r}_n) = 0$ ナラ z ハ $\mathfrak{p}$ デ二次ノ 0 ヲモタナケレバナラナクナッテ矛盾トナル。$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ノ時モ同様

∴ $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$ トナル。Q.E.D.

∴ R_K ナル Modul ハ イ). topologisch ロ). R_K ノ任意ノ一点ノ近傍ハ円ノ内部ト homöomorph. ハ) R_K ハ kompakt デ zusammenhängend. ナルコトカラ Topologie ノ定理カラ（例ヘバ Kérèkjártó: Hamb.

Abh. 8)『$\mathcal{R}_K$ ハ Euclid 平面ニオケル Vektor 加法ヲ x, y 両成分ヲ mod. 1 デ考ヘタ Modul (即 Torus ノ Translations modul) ト homöomorph トナル』
即チ $\mathcal{R}_K$ ニ適当ナ x, y、平行座標ヲ入レルト $\mathfrak{p}_2 \longleftrightarrow (x_i, y_i)$ ト對應スル時 $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_3 \longleftrightarrow x_1+x_2\equiv x_3 \ (\mathrm{mod.}\ 1)$. $y_1+y_2\equiv y_3 \ (\mathrm{mod.}\ 1)$ トナル。之レカラ $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$ トナヲ用ヒルコト, $\mathfrak{p}^{\tau_{0,a}}=\mathfrak{p}+a$ ヲ Translation トイフコトノ合法性ガワカル。

(IV) Abel ノ定理

K ノ ganz ナ Differential du ヲトリ, $\mathcal{R}_K$ ヲ canonisch ニ切断シテ ($\mathcal{R}'_K$ トスル)(例ヘバ (III) デ定メタ座標軸ニヨッテ) 単一連結トスレバ Cauchy ノ定理カラ、其ノ上ノ道デハ $\int_0^{\mathfrak{p}} du$ ト書イテ一意的ニ意味ヲモツ。

一般ニ a, b ヲ結ブ道ヲ $W(a, b)$ トカキ, 又 $\tau_{0,c}$ デナル Translation デ生ズル道ヲ $W^\tau(a^\tau, b^\tau)=W^\tau(a+c, b+c)$ トカクト、次ノ基本式ガ成立スル。

[A] $$\boxed{\int_{W(a,b)} du-\int_{W^\tau(a^\tau,\, b^\tau)} du}$$

又、W, W^τ 共ニ $\mathcal{R}'_K$ ナル単一連結ノ領域ニアレバ, コレハ
$$\int_a^b du=\int_{a+c}^{b+c} du$$
トカケル。

[A] ノ証明ハ簡単. (II) ノ (6) 式カラ $\int_W du=\left(\int_W du\right)^\tau=\int_{W^\tau}(du)^\tau$

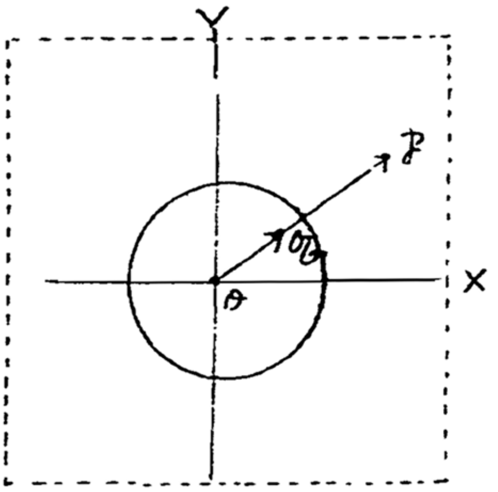
$$=\int_{W^{\tau}} du.$$

次ニ $\mathcal{R}'_K$ 内デ

$$[\mathrm{B}] \qquad \boxed{\int_{\theta}^{\mathfrak{z}} du = 0 \longrightarrow \mathfrak{z} = \theta}$$

又ハ一般ニ $\int_W du = 0$ ナラ $W = W(\theta, \theta)$ トナリ、コノ Zyklus ハ homotop 0 ニナル。

証明ハ（III）ノ結果ヲ用ヒル。（III）ニヨリ平行座標ヲ $\mathcal{R}'_K$ ニ入レバ、$\theta, \mathfrak{z}$ ヲ結ブ線分上ニ $\frac{1}{n}$ ノ点 η_n ヲトレバ $n\eta_n = \mathfrak{z}$。



又ハ $\eta_n = \frac{1}{n}\mathfrak{z}$ トナリ、$\tau = \tau_{\theta, \eta_n}$、$W(\theta, \eta_n) = \overrightarrow{\theta, \frac{1}{n}\mathfrak{z}}$ トスレバ

$$W^{\nu\tau} = \overrightarrow{\frac{\nu}{n}\mathfrak{z}, \frac{\nu+1}{n}\mathfrak{z}}$$ トナル。

$\therefore$ [A] カラ $\mathfrak{z} \neq \theta$ トスレバ

$$n\int_{\theta}^{\eta_n} du = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\int_{\theta}^{\eta_n} du\right)^{\nu\tau}$$

$$=\int_{\theta}^{\eta_n} + \int_{\eta_n}^{2\eta_n} + \cdots\cdots + \int_{(n-1)\eta_n}^{\mathfrak{z}} = \int_{\theta}^{\mathfrak{z}} du.$$

$\therefore \int_{\theta}^{\mathfrak{z}} du = 0$ カラ $\int_{\theta}^{\eta_n} du = 0$ トナル。 $\therefore \int_{\theta}^{\eta} du$ ナル regular ナ函数ガ θ ニ konverg. スル η_n デ 0 トナルカラ矛盾スル。 $\therefore \mathfrak{z} = \theta$. 道ガ $\mathcal{R}'_K$ ニ入ラヌ時モ同様。

Q.E.D.

[B] カラ又 $\int_{c_1} du = w_1, \int_{c_2} du = w_2$（コヽニ c_1, c_2 ハ $\mathcal{R}_K$ ノ

X軸，Y軸ニ沿フ Zyklus）トスレバ $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ デ、

ω_1, ω_2 ガ同一 ω_0 デ

$$\omega_1 = n_1 \omega_0, \quad \omega_2 = n_2 \omega_0, \quad (n_1,\ n_2 \text{ハ整数})$$

トナラナイコトガ分ッタ。

『Abel ノ定理』 $K \ni \mathfrak{a} \sim \dfrac{\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1 \cdots\cdots \mathfrak{q}_r}$ ナル $\mathfrak{a}$ ノ存在スルタメノ必要充分條件ハ

$$\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{q}_1} du + \cdots\cdots + \int_{\mathfrak{p}_r}^{\mathfrak{q}_r} du = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \quad (n_1,\ n_2 \text{ハ整数})$$

トナルコトデアル。

（証明） 充分 [A] ヲ用フレバ

$$\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{q}_1} + \cdots\cdots + \int_{\mathfrak{p}_r}^{\mathfrak{q}_r} = \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}_1 + \cdots \mathfrak{p}_r - \mathfrak{q}_1 - \cdots\cdots - \mathfrak{q}_r} + m_1 \int_{C_1} + m_2 \int_{C_2}$$

$$= n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 .$$

∴ [B] ノ論法カラ $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $\mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_r - \mathfrak{q}_1 - \cdots\cdots - \mathfrak{q}_r = \mathfrak{o}$

Def. カラ $\mathfrak{a} \sim \dfrac{\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1 \cdots\cdots \mathfrak{q}_r}$ ナル $\mathfrak{a}$ ガアル。必要ナルコトモ同様。

Q.E.D.

（V） 楕円函数。（加法定理）

$\mathfrak{R}_K$ ヲ C_1, C_2 ニ沿ッテ切断シテ $\mathfrak{R}'_K$ トナシ、

$$(7) \quad \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}} du = w(\mathfrak{p})$$

トオケバ（B）カラ逆ニ $\mathfrak{p}$ ハ w ノ値デ一意ニ定マル。∴ $\mathfrak{p} \in K$ ヲトル時

$$z(\mathfrak{p}) = z(w)$$

ト w ノ函數ト見ル時 z ヲ w ノ楕円函數ト云フ。

『加法定理』 楕円函數ハ代數的加法公式ヲ有スル。即チ有理整式 R アッテ

$$R\left(z(w_1),\ z(w_2),\ z(w_1 + w_2)\right) = 0.$$

(証明). (7) = ヨリ $w_1 = w(\mathfrak{p}_1)$, $w_2 = w(\mathfrak{p}_2)$, $w_1 + w_2 = w(-\mathfrak{p}_3)$ トオケバ,

$$0 = w_1 + w_2 - (w_1 + w_2) = \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}_1} + \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}_2} - \int_{\mathfrak{o}}^{-\mathfrak{p}_3} = \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3} \quad (\because \text{(A) カラ})$$

$\therefore$ (B) ヨリ $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = 0$. 或ハ K ヲ $u \sim \dfrac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}^3}$ ナル u が存在スル。

今 $\mathfrak{o}^{-3}$ ノ Multiplum ノ Basis ヲ (Riemann-Roch カラ) $1, x, y$ トスレバ

$$u = a + bx + cy \qquad a, b, c \text{ ハ悉クハ } 0 \text{ デナイ。}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} u(\mathfrak{p}_1) &= 0 = a + bx(\mathfrak{p}_1) + cy(\mathfrak{p}_1) \\ u(\mathfrak{p}_2) &= 0 = a + bx(\mathfrak{p}_2) + cy(\mathfrak{p}_2) \\ u(\mathfrak{p}_3) &= 0 = a + bx(\mathfrak{p}_3) + cy(\mathfrak{p}_3) \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \quad (8) \quad \begin{vmatrix} 1 & x(\mathfrak{p}_1) & y(\mathfrak{p}_1) \\ 1 & x(\mathfrak{p}_2) & y(\mathfrak{p}_2) \\ 1 & x(\mathfrak{p}_3) & y(\mathfrak{p}_3) \end{vmatrix} = 0$$

$x(\mathfrak{p}_1) = x(w_1)$, $x(\mathfrak{p}_2) = x(w_2)$, $x(\mathfrak{p}_3) = x(-w_1 - w_2)$ 等トシテ, x ト u, y ト u トノ間ノ代數関係ヲ用ヒテ x, y ヲ (8) カラ消去スレバ求ムル代數的加法公式ヲ得ル。 Q.E.D.

例. Weierstrass ノ $\wp$ 函數.

Geschlecht 1 ノ K アル時 $K = k(x, y)$, $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ ト Weierstrass ノ Normalform ニカク。 $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\infty$ ト スレバ $\mathfrak{o}^{-3}$ ノ Multiplum ノ代表トシテ、$1, x, y$ ガトレル。

ganz ナ Differential $du = \dfrac{dx}{y} = \dfrac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$.

$$\therefore \quad w = \int_{\mathfrak{p}_\infty}^{\mathfrak{p}} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \text{ トスレバ } x(\mathfrak{p}) = \wp(w).$$

コレガ Weierstrass ノ $\wp$ 函数。 $\therefore\ y = \wp'$ トナル。

故ニ (8) カラ

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(w_1) & \wp'(w_1) \\ 1 & \wp(w_2) & \wp'(w_2) \\ 1 & \wp(w_3) & \wp'(w_3) \end{vmatrix} = 0 , \quad w_1 + w_2 + w_3 = \text{週期}.$$

トナリ、ヨク知ラレタ関係トナル。